בס"ד יום ראשון ד' תמוז התשע"ו

10.7.2016

חדו"א 1מ' - 104018 - מבחן מועד א' - סמסטר אביב תשע"ו

משך המבחן שלוש שעות. יש לכתוב בעט כחול או שחור בלבד ולפרט כל צעד ושעל. כל חומר עזר אסור בשימוש.

סך כל הנקודות שאפשר להשיג הוא 103 אך הציון המקסימלי הוא 100

שאלה 1 (10 נק')

לפניך 3 אינטגרלים מוכללים: $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}$, $\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x}$, $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}$. איזה טענה מהטענות הבאות נכונה:

א. שניים מתכנסים בהחלט ואחד בתנאי
ב. אחד מתכנס בהחלט, אחד בתנאי ואחד מתבדר
ג. שניים מתכנסים בתנאי ואחד מתבדר
ד. שניים מתבדרים ואחד מתכנס בהחלט
ה. שניים מתכנסים בהחלט ואחד מתבדר

$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}$ מתכנס בהחלט $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}$ מתכנס בתנאי ו- $\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x}$ מתבדר (ראו ברשימות הקורס)

ולכן התשובה היא ב.

שאלה 2 (10 נק')

אם $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ אזי

א. סדרת הסכומים החלקיים של הטור $\sum_{n=1}^\infty a_n$ חסומה.

ב. אם הטור $\sum_{n=1}^\infty a_n$ מתכנס, אזי גם הטור $\sum_{n=1}^\infty |a_n|$ מתכנס.

ג. הטור $\sum_{n=1}^\infty a_n^n$ מתכנס.

ד. אם הטור $\sum_{n=1}^\infty \sin^2(a_n)$ מתכנס, אזי גם הטור $\sum_{n=1}^\infty a_n$ מתכנס.

ה. הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ מתכנס

פתרון. אם האיבר הכללי שואף לאפס זה לא אומר בהכרח שהטור מתכנס ולכן א. לא נכון. ברור גם ש-ב. לא נכון למשל עבור טור לייבניץ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$. ד. לא נכון למשל אם נבחר $a_n=\frac{1}{n}$. ה. לא נכון אם נבחר למשל $a_n=\frac{1}{\log n}$ ג. נכון ע"פ מבחן השורש.

שאלה 3 (10 נק')

הגבול $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{dt}{\sin t}}{\int_0^x \arctan t dt}$ הוא:

א. $\ln 5$
ב. $\ln 3$
ג. ∞
ד. $\ln 4$
ה. 0

פתרון. ע"י לופיטל נקבל $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{dt}{\sin t}}{\int_0^x \arctan t dt}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{dt}{\sin t}}{\arctan x}=2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{dt}{\sin t}$

נחשב את $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{dt}{\sin t}$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{\sin t dt}{\sin^2 t}=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{\sin t dt}{1-\cos^2 t}=-\int_0^{-\frac{1}{2}}\frac{dv}{1-v^2}=-\frac{1}{2}\left(\int_0^{-\frac{1}{2}}\frac{dv}{1-v}+\int_0^{-\frac{1}{2}}\frac{dv}{1+v}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{1+v}{1-v}\right|\Bigg|_0^{-\frac{1}{2}}\right]=\frac{\ln 3}{2}$$

ולכן התשובה ב.

שאלות נכון/לא נכון

שאלה 4 (4 נק')

$\ln x \le \frac{x}{e}$ עבור $x > 0$

א. נכון ב. לא נכון

פתרון. נכון. נחקור את הפונקציה $f(x) = \ln x - \frac{x}{e}$. $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e}$ ולכן הנגזרת מתאפסת בנקודה $x = e$, הנגזרת שלילית מימין לנקודה $x = e$ וחיובית משמאל לנקודה $x = e$ ולכן $x = e$ נקודת מקסימום מוחלט שבו $f(e) = 0$ ולכן $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} \le 0$ לכל $x > 0$.

שאלה 5 (4 נק')

למשוואה $3^x + 4^x = 5^x$ יש לפחות שורש ממשי אחד

א. נכון ב. לא נכון

נכון. למשל $x = 2$

שאלה 6 (4 נק')

$$\int_0^{2\pi} \cos^4 t dt = \int_0^{2\pi} \sin^4 t dt$$

א. נכון ב. לא נכון

פתרון. נכון

$$\int_0^{2\pi}\cos^4 t dt-\int_0^{2\pi}\sin^4 t dt=\int_0^{2\pi}\left(\cos^4-\sin^4 t\right)dt=$$
$$\int_0^{2\pi}\left(\cos^2 t-\sin^2 t\right)dt=\int_0^{2\pi}\left(\cos 2t\right)dt=\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{2\pi}=0$$

שאלות פתוחות

שאלה 7 (18 נק')

א. (5 נק') נסחו את משפט לגרנז'

ראו ברשימות הקורס

ב. (7 נק') הוכיחו כי $\sin y-\sin x\le y-x$ לכל $y>x$.

ע"פ משפט לגרנז' נקבל כי קיימת נק' c כך ש- $\frac{\sin y-\sin x}{y-x}=\cos c\le 1$ ומכאן נקבל את הנדרש.

ג. (6 נק') הראו כי $\sqrt{3}-\sqrt{2}\le\frac{\pi}{6}$

פתרון. פשוט להציב בסעיף ב' $y=\frac{\pi}{3}$ ו- $x=\frac{\pi}{4}$

שאלה 8 (23 נק')

א. (5 נק') הגדירו: פונקציה $f(x)$ גזירה בנקודה x_0.

ראו ברשימות הקורס

ב. (8 נק') הוכיחו ע"פ ההגדרה אם $f(x)=\sin x$ אזי $f'(x)=\cos x$ (**<u>רמז</u>**: תוכלו להיעזר בנוסחא $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$)

ראו ברשימות הקורס

ג. (10 נק') תהא $f(x)=|\sin x|+x$. האם יש לפונקציה מינימום ומקסימום מוחלטים בקטע $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$? אם יש הסבירו למה ומצאו אותם. אם אין, הסבירו למה.

ראשית הפונקציה רציפה בקטע סגור ולכן לפונקציה נק' מינימום ומקסימום מוחלטים ע"פ ויירשטראס. נמצא אותן.

ראשית, נרשום
$$f(x)=\begin{cases} x+\sin x & 0\le x\le\frac{\pi}{2} \\ x-\sin x & -\frac{\pi}{2}\le x<0 \end{cases}$$

בקטע הראשון $0<x<\frac{\pi}{2}$

$f'(x)=1+\cos x=0$ ולכן נקודה חשודה היא $x=\pm\pi$ שהיא מחוץ לתחום.

בקטע השני $-\frac{\pi}{2}<x<0$

$f'(x)=1-\cos x=0$ ולכן נקודה חשודה היא $x=0$ שהיא גם מחוץ לתחום.

נבדוק בקצוות ובנקודה שאולי הפונקציה לא גזירה $x=0$

$f(0)=0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1+\frac{\pi}{2}$ ו- $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=1-\frac{\pi}{2}$

ומכאן כי המקסימום מתקבל בנקודה $\left(\frac{\pi}{2},1+\frac{\pi}{2}\right)$ והמינימום בנקודה $\left(-\frac{\pi}{2},1-\frac{\pi}{2}\right)$

שאלה 9 (20 נק')

א. (6 נק') פתחו את הפונקציה $x-\ln(1+x)$ לפולינום טיילור סביב הנקודה $x_0=0$ מסדר 3 עם שארית.

פתרון. נסמן $f(x)=x-\ln(1+x)$ אזי $f(0)=0$

כמו כן $f'(x)=1-\frac{1}{1+x}$ ולכן $f'(0)=0$

$f''(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$ ומכאן $f''(0)=1$

ולבסוף $f'''(x)=-\frac{2}{(1+x)^3}$ ולכן $f'''(0)=-2$

לצורך השארית נחשב $f^{(4)}(x)=\frac{6}{(1+x)^4}$

ובסה"כ נקבל שקיימת נק' c בין x ל-0 כך ש-

$$x-\ln(x+1)=\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4(1+c)^4}$$

ב. (6 נק') בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}-\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right)$. נמקו היטב.

ע"פ א' מקבלים שהאיבר הכללי הוא $\frac{1}{2n^4}-\frac{1}{3n^6}+\frac{1}{4(1+c)^4n^8}$ ולכן מתכנס ע"פ קריטריון ההשוואה עם $\frac{1}{n^2}$ למשל.

ג. (8 נק') מצאו את תחום ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}-\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right)(x-1)^n$

<u>פתרון</u>. ע"י שימוש בנוסחת המנה למציאת רדיוס התכנסות מקבלים שרדיוס ההתכנסות של $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}-\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right)t^n$ הוא 1 וע"פ סעיף קודם הטור מתכנס גם בקצוות. ולכן הטור המקורי מתכנס עבור $0 \le x \le 2$

בהצלחה!